LinAlg PVK HS19 06.01.20

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

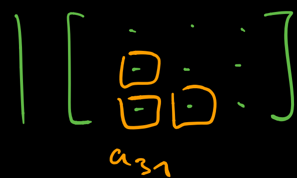
Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

a_{21}

Q orthogonal
R rechte obere Dreiecksm.

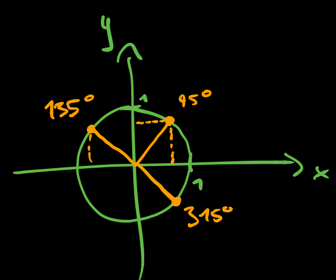
$$G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad G \cdot A = R \iff Q = G^T$$



$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix} = R$$

0

$$\Rightarrow \cos\varphi = -\sin\varphi$$



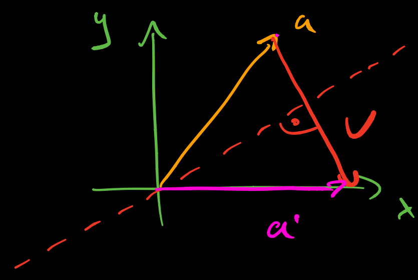
$$\varphi = \underline{135°} \text{ oder } \underline{\underline{315°}}$$

$$\sin 315° = -\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}, \quad \cos 315° = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$R = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}} \qquad Q = G^T = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ \boxed{2} & * & * \\ \boxed{1} & * & * \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$$



(i) $\underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ projezieren auf $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{a}_{i1}' = \pm \|\underline{a}_{i1}\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\underline{a}_{i1}\| = \sqrt{4+4+1} = 3, \quad \underline{a}_{i1}' = \begin{bmatrix} \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\underline{v} = a_{i1} \pm \|a_{i1}\| e_1 = a_{i1} + a_{i1}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$H = I - \frac{2}{\underline{v}^T \underline{v}} \underline{v}\,\underline{v}^T = I - 2\underline{u}\,\underline{u}^T \qquad \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

(iii) $\underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

(iv)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset^{1} & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$$

$$H \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & ☆ & ☆ \\ 0 & ☆ & ☆ \\ 0 & \boxed{☆} & ☆ \end{bmatrix} = R'$$

Nächster Schritt:

$$\Rightarrow \underline{H_2 \cdot (H_1 \cdot A)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \Delta \\ 0 & \times & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

$$Q = (H_2 H_1)^T = H_1^T H_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a+b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \text{ s.d. } A^T = -A \}$, $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

(i) $U_1, U_2 \in U$

$$(U_1+U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1+U_2)$$

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $U \in U$

$$(\alpha U)^T = U^T \alpha^T = \alpha U^T = -\alpha U = -(\alpha U) \quad \square$$

Basis beweisen: $\mathcal{P}_2$

Beispiel: $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2 + x - 1,\ c^{(3)} = 2x^2 - 5x \}$

1.

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} c^{(1)} \quad \checkmark \\ x &= \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7} \quad \checkmark \\ x^2 &= \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7} \quad \checkmark \end{aligned} \right\}$$

Bildet minimales Erzeugendensystem, da nur 3 Vektoren und Raum 3-D

$\rightsquigarrow$ Basis

2.

$$\begin{array}{ccc} c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang } 3$$

lin. unabh.

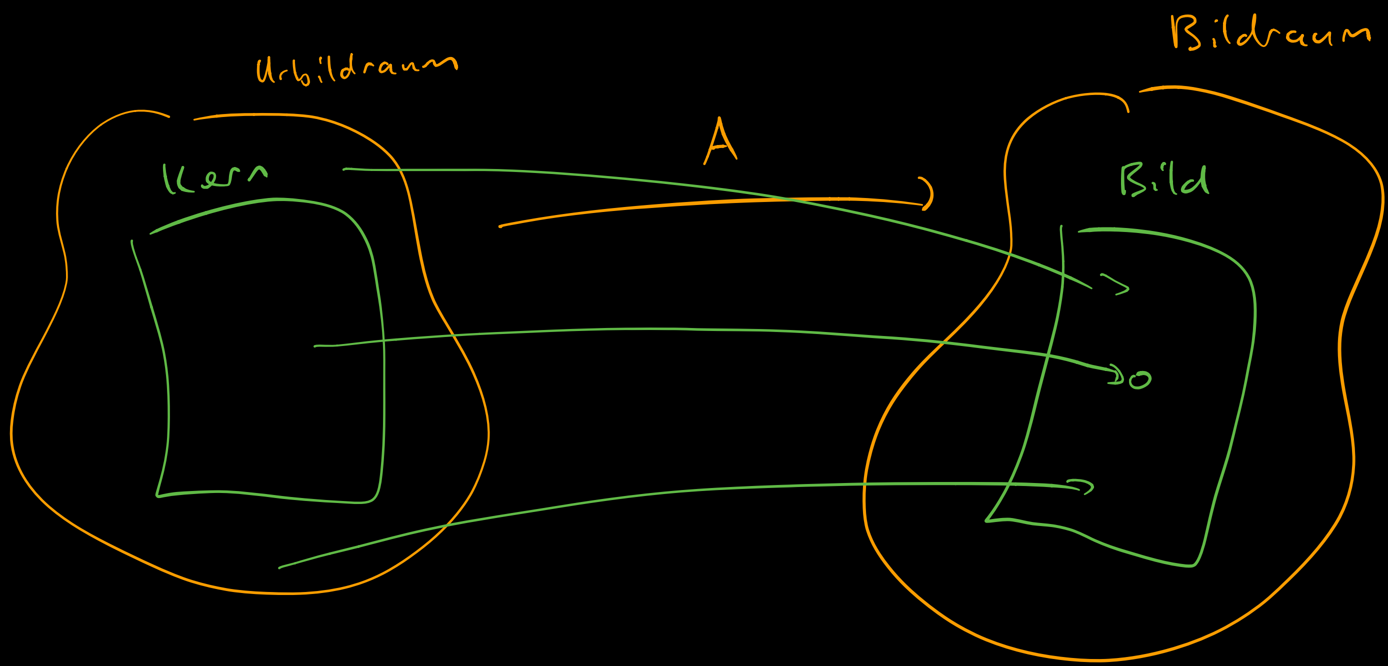
$\Rightarrow$ Basis.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Basis von Kern & Bild:

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$x_4 = s \in \mathbb{R}$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = \dfrac{3s - 3t}{2}$

$x_1 = \dfrac{-x_2 - x_3}{2}$

$= \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}s$

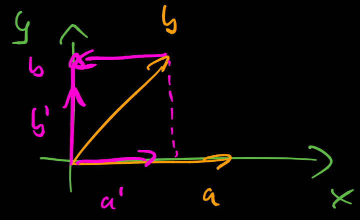
$= \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:

(i) $$e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$$

(ii) $$e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)} \quad \& \quad e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$$

(iii) $$e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)} \quad \& \quad e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$$

usw.

Beispiel: $\mathcal{P}_4$ mit $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

$$\|p\| = \sqrt{\langle p,p \rangle} = \sqrt{\int_0^1 p(x)\, p(x)\, dx}$$

(i) $$e^{(1)} = \frac{1}{\|1\|} = \underline{\underline{1}}$$

$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1\, dx} = \underline{1}$$

(ii) $$e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle\, 1$$

$$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4\, dx = 3x^4 - \left[\frac{3}{5} x^5\right]_0^1$$

$$= \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\frac{15}{4} x^4 - \frac{3}{4}}}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5} x^4 + \frac{9}{25}\, dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25} x^5 + \frac{9}{25} x \right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \underline{\frac{4}{5}}$$

Verallgemeinerte Norm:

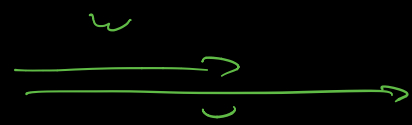
$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$= \underline{\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle}$

$\det(\lambda A)$

$\lambda^n \det(A)$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle), \quad a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

(i) $\forall x, y, z \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle x, \alpha(y+z) \rangle_A = \alpha \langle x, y \rangle_A + \alpha \langle x, z \rangle_A$$

$$= x^T A (\alpha (y+z)) = \alpha x^T A y + \alpha x^T A z = \alpha \langle x, y \rangle_A + \alpha \langle x, z \rangle_A \quad \square$$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$= x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x = \langle y, x \rangle$$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\underline{x^T A x} \geq 0 \quad \rightarrow A$ positiv definit?

Hurwitz:

$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(2) = 2 > 0$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 4 = 6 > 0$$

$\rightarrow A$ pos. def. $\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_A$ pos. def. $\square$

Kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T^{-1}"'] & O \\ \cdot \arrow[r, "D"'] & \cdot \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

$A = T D T^{-1} x$

A^k – Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}\ldots T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^k \underbrace{T^{-1}x}_{z} \qquad z = T^{-1}x \qquad Tz = x$$

$$= TD^k z$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A^{10}x$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \qquad Ax = \lambda x$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - 2\lambda - 2\right] + 2\left[2\lambda - 4 + 2\right] + \left[4 + 2\lambda\right]$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda \cancel{-4} \cancel{+4} + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda \overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\lambda_1 = 0}, \ \underline{\lambda_2 = -2}, \ \underline{\lambda_3 = 4}$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

$$EV: \quad (A-\lambda I)x = 0 \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{-2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\lambda = 4: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array}$$

$$A^{10}x = TD^{10}z = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \iff y = e^{A} y_0$$

$$y' = \begin{array}{l} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ y_2' = a_{21} y_1 + \text{- - - -} \\ y_3' = \text{- - - - -} \end{array}$$

gekoppeltes System

$$y' = Ay$$

$$= T D \underbrace{T^{-1} y}_{z}$$

$z = T^{-1} y$

$T z = y$

$$T^{-1} y' = D T^{-1} y$$

$$z' = D z$$

$$z_1' = d_1 z_1$$

$$z_2' = d_2 z_2$$

$$z_3' = d_3 z_3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = e^{d_1 t} c_1 \\ z_2 = e^{d_2 t} c_2 \\ z_3 = e^{d_3 t} c_3 \end{array} \Rightarrow \underline{z(t) = e^{Dt} z_0}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$y = Tz = \underline{T e^{Dt} z_0}$$

$$= \underline{c_1 e^{d_1 t} \begin{bmatrix} t^{(1)} \end{bmatrix} + c_2 e^{d_2 t} \begin{bmatrix} t^{(2)} \end{bmatrix} + c_3 e^{d_3 t} \begin{bmatrix} t^{(3)} \end{bmatrix}}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad y' = Ay$$

AWP: $\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[(\lambda+6)(\lambda-3) + 18\right]$$

$\underline{\lambda_1 = 3}$, $\underline{\lambda_2 = 0}$

$\underline{\lambda_2 = -3}$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{2}{3}s \\ x_1 = \frac{1}{3}s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\lambda_3 = -3: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{5}{6}s \\ x_1 = \frac{2}{3}s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{-3} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{0t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_0 ? \quad z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \underline{0}, \quad c_2 = \underline{1}, \quad \underline{c_3} \in \mathbb{R}$$

$$Tz = y$$

$$y_0 = y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

A symm.

a)

$$\text{EW: } \det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[-\lambda - 1\right] + \left[\lambda + 1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 6\right]$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$, $\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$

$\underline{\underline{\lambda_3 = 4}}$

EV: $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s \end{array}$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = -1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_3 = 4$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

b) Basis $= \{E_1, E_{-1}, E_4\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = T$$

c)

$$e^{A} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

$$= \lim_{N \to \infty} T \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!}}_{e^{D}} T^{-1} = T e^{D} T^{-1}$$

$$= T e^{D} T^{T}$$

$$e^{A} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1} & & 0 \\ & e^{-1} & \\ 0 & & e^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{1} & e^{1} & e^{1} \\ 0 & -\sqrt{3}e^{-1} & \sqrt{3}e^{-1} \\ \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e^{1}+2e^{4} & -2e^{1}+2e^{4} & -2e^{1}+2e^{4} \\ -2e^{1}+2e^{4} & e^{1}+3e^{-1}+2e^{4} & e^{1}-3e^{-1}+2e^{4} \\ -2e^{1}+2e^{4} & e^{1}-3e^{-1}+2e^{4} & e^{1}+3e^{-1}+2e^{4} \end{bmatrix}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c)**. Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

$$Ax = b$$

$$USV^T x = b$$

$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{wo } \hat{S} V^T x = d_0, \quad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) $$\underline{\underline{A^T A x = A^T b}}$$

b) 2, 1

V, U orth.

$\hat{S}$ ist diagonal

V: EV von $A^T A$

U: EV von AA^T

$$u^{(i)} = \frac{Av^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ von $A^T A$, AA^T

$$V: A^T A = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}}$$

$$\text{EW: } \det(A^T A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (52-25\lambda)(73-25\lambda) - 36^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}$$

$\lambda = 0:$ ↯

$\lambda = 1:$ $\quad 27 \cdot 48$

$\quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$\quad (-48)(-27)$

$\lambda = 2:$ ↯

$\lambda = 3:$ ↯

$\lambda = 4:$ ✓

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\underline{\lambda_2 = 4}$

$\underline{\underline{\sigma_1 = 2}} \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = 1}} \qquad \Rightarrow \underline{S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

c)

EV: $(A^T A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 4: \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4}s \end{array}$

$\frac{3}{4}$

$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

$= \underline{\text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}}$

$\begin{bmatrix} 52 - 25\lambda & -36 \\ -36 & 73 - 25\lambda \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3} s \end{array}$$

$\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0 \qquad d = U^T b$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \\ d_1 \end{matrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left(\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$x = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{26}{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

Gram-Schmidt

$A \rightarrow Q$

$A = Q \cdot R$

a) $\beta = -1$, $\alpha = \frac{5}{2}$

b)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & & \emptyset \\ & \frac{\sqrt{45}}{2} & \\ \emptyset & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)|$

$= |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \det R| = |\det R|$

$= \frac{45}{2}$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right) x$$
$$= x^2 - \int_0^1 2y^2\,dy \; x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 \cdot x = \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

zeigen Linearität: $\forall a,b \in \mathcal{P}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha a) = \alpha \mathcal{F}(a)$

überprüfen i) & ii)

$$\mathcal{F}(a+\alpha b) = (a+\alpha b) - \left(\int_0^1 y\,(a+\alpha b)'\,dy\right) x$$
$$= a + \alpha b - \left(\int_0^1 y a' + \alpha y b'\,dy\right) x$$

$$= a + \alpha b - \int_0^1 y a' dy \, x - \int_0^1 \alpha \, y b' dy \, x$$

$$= a - \int_0^1 y a' dy \, x + \alpha \left(b - \int_0^1 y b' dy \, x \right)$$

$$= F(a) + \alpha \, F(b) \quad \square$$

b)

$$1 \xrightarrow{F} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{2} x = 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x^2 \longrightarrow x^2 - \frac{2}{3} x = 0 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot x + 1 \cdot x^2$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Fx = F \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \end{array}$$

$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$

c)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \\ x &= \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2} \\ x^2 &= b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \end{aligned}\right\}$$

Alte Basis als lin. komb. der neuen Basis darstellbar

→ Erzeugendensystem

→ Basis

d) $\quad B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$$x-1 = \underline{-1}\cdot 1 + \underline{1}\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$x+1 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{1}\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$x^2-1 = \underline{-1}\cdot 1 + 0\cdot x + \underline{1}\cdot x^2$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \arrow[d, "T^{-1}"] \\ B_2 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "\tilde{F}"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

$$\tilde{F} = T^{-1} F T$$

$$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x - 1 =$$

$$x+1 \longrightarrow \frac{1}{2}x + 1 =$$

$$x^2-1 \longrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - 1 =$$

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

A symm. $\Rightarrow$ $A = TDT^T$ existiert

a)

$$\Rightarrow \det(A) = \det(TDT^T) = \underbrace{\det T}_{\pm 1} \det D \underbrace{\det T^T}_{\pm 1} = \det D$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \quad \text{wobei } \lambda_i \in \text{EW von } A$$

$$< 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, i \in [1,n] : \lambda_i < 0$$

$\square$

b)

$$x^T A x = x^T T D T^T x$$

$$= (T^T x)^T D (T^T x)$$

Wählen $T^T x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← k-te Stelle für $\lambda_k < 0$

s.d. $(T^T x)^T D (T^T x) = \lambda_k < 0$ $\square$

$$T^T x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t^{(k)}$$

c) Schur-Zerlegung:

$$\forall A \quad \exists S, R \in \mathbb{R}^{n \times n} : \quad A = SRS^T$$

wobei S orthogonal

R obere rechte Dreiecksmatrix

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

$\max(\mathrm{diag}(\|Q^TQ - I\|)) < 0.1$

richtig

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

$A^T = -A$

$\det(A^T)$ $\det(A)^T = \det(A)$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

falsch

richtig

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.

c) $P^{100} = P^{21}$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^0 = P^3 = P^6 = P^9$$

P^{100} : $100 \bmod 3 = 1$ $\quad P^{100} = P^1$

P^{21} : $21 \bmod 3 = 0$ $\quad P^{21} = P^0$

falsch

d) $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$

richtig

e) falsch

f) $\begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 29 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ <u>wahr</u>